Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **1** (2014) 45–52

УДК 517.957

Классические и неклассические симметрии нелинейного дифференциального уравнения для описания волн в жидкости с пузырьками газа

Кудряшов Н. А.[1], Синельщиков Д. И.[2]

Национальный Исследовательский Ядерный Университет МИФИ
115409 Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31

e-mail: nakudryashov@mephi.ru, disinelshchikov@mephi.ru

получена 26 января 2014

Ключевые слова: нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа, классические симметрии, неклассические симметрии, точные решения

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение для описания нелинейных волн в жидкости с пузырьками газа при учете вязкости жидкости и процесса межфазного теплообмена. Исследованы классические и неклассические симметрии данного уравнения в частных производных. Показано, что исследуемое уравнение инвариантно относительно преобразований сдвига по пространственной и временной координатам. При дополнительном ограничении на параметры, уравнение также инвариантно относительно преобразования Галилея. Неклассические симметрии рассматриваемого уравнения находятся методом Блюмана и Коула. Изучены регулярный и сингулярный случаи неклассических симметрий. Найдены пять семейств неклассических симметрий, допускаемых исследуемым уравнением. Построены инвариантные редукции, соответствующие данным симметриям. С их помощью найдены семейства точных решений исследуемого уравнения. Полученные решения выражаются через рациональные, тригонометрические и специальные функции.

Введение

Математические модели волновых процессов в жидкости с пузырьками газа используются для описания процессов и явлений в физике, химии, биологии и других разделах науки [1, 2].

В работе [3] получено нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее волновые процессы в жидкости с пузырьками газа при учете вязкости жидкости и межфазного теплообмена в случае преобладания диссипации. Уравнение имеет вид

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} - \mu u_{xx} - \nu (u u_x)_x + \gamma u_{xt} = 0\,, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта для поддержки ведущих научных школ РФ № 2296.2014.1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта для поддержки молодых ученых–кандидатов наук № 3694.2014.1.

где $u(x,t)$ — безразмерное возмущение плотности газожидкостной смеси, t — безразмерное время, x — безразмерная координата, $\alpha, \beta, \mu, \nu, \gamma$ — безразмерные параметры, определяемые физическими характеристиками газожидкостной смеси.

Некоторые точные решения уравнения (1) с использованием метода усеченных разложений [4–6] были получены в работе [3]. Однако хорошо известно, что использование методов группового анализа дифференциальных уравнений часто позволяет расширить классы получаемых точных решений [7–9]. Группы преобразований, допускаемые уравнением (1), до настоящего времени не изучались.

Целью данной работы является исследование классических и неклассических симметрий уравнения (1).

В разделе 1 рассматриваются классические симметрии, допускаемые (1). Неклассические симметрии уравнения (1) получены в разделе 2. В разделе 3 рассмотрены инвариантные редукции уравнения (1) и их точные решения. Построены точные решения уравнения (1), выраженные через рациональные, логарифмические и специальные функции.

1. Классические симметрии нелинейного дифференциального уравнения для описания волн в жидкости с пузырьками газа

Применим классический метод Ли [7–9] для анализа уравнения (1). Используя преобразования растяжения, можно показать, что без ограничения общности в (1) можно положить $\alpha = \nu = 1$. Тогда из (1) приходим к уравнению

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} - \mu u_{xx} - (uu_x)_x + \gamma u_{xt} = 0\,. \tag{2}$$

В соответствии с классическим методом Ли уравнение (2) инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований с компонентами касательного векторного поля $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$ и $\eta(x,t,u)$, если величины $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$, $\eta(x,t,u)$ удовлетворяют определяющему уравнению

$$X^{(3)}E\Big|_{E=0} = 0 \tag{3}$$

на решениях уравнения (2). Здесь X^3 – третье продолжение инфинитезимального оператора X

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

которое имеет вид

$$X^3 = X + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}. \tag{5}$$

Подставляя выражения для компонент $\eta^t, \eta^x, \eta^{xx}, \eta^{xxx}$ продолжения касательного векторного поля в (3), приходим к переопределенной линейной системе уравнений в частных производных для ξ, τ и η. Общее решение этой системы при $\gamma \neq -1$ имеет вид

$$\xi = c_1, \quad \tau = c_2, \quad \eta = 0, \tag{6}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

В случае $\gamma = -1$ компоненты касательного векторного поля имеют вид

$$\xi = c_3\, t + c_4, \quad \tau = c_5, \quad \eta = c_3, \tag{7}$$

где c_3, c_4, c_5 — произвольные постоянные.

Таким образом, алгебра операторов, допускаемых уравнением (2), при $\gamma \neq -1$ имеет вид

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \tag{8}$$

а при $\gamma = -1$ данная алгебра представлена операторами

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = t\partial_x + \partial_t. \tag{9}$$

Операторы X_1 и X_2 порождают группы преобразований сдвига по переменным x и t соответственно, оператор X_3 отвечает группе преобразований Галилея.

2. Неклассические симметрии нелинейного дифференциального уравнения для описания волн в жидкости с пузырьками газа

Уравнения в частных производных могут допускать симметрии, не совпадающие с симметриями, найденными классическим методом Ли. Такие симметрии называются неклассическими, и метод нахождения таких симметрий был предложен в работе Блюмана и Коула [10]. Рассмотрим применение данного метода к уравнению (2).

В соответствии с методом Блюмана и Коула [10] рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\xi u_x + \tau u_t - \eta = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) является условием инвариантности произвольной поверхности в пространстве переменных (x, t, u) относительно группы преобразований, задаваемой оператором X. Затем рассматриваются классические симметрии, допускаемые уравнениями (2) и (10) одновременно. Можно показать, что условие инвариантности для уравнения (10) выполняется при любых значениях компонент касательного векторного поля ξ, τ и η (см. работы [11, 12]).

Отметим, что если X является оператором неклассической симметрии, то λX также является оператором неклассической симметрии для любой неравной тождественно нулю функции $\lambda(x, t, u)$ [11, 12]. Следовательно, в дальнейшем необходимо рассмотреть два случая неклассических операторов X. Первым из них является случай $\tau \neq 0$, где без ограничения общности можно считать, что $\tau = 1$. Вторым случаем является случай $\tau = 0$, в котором без ограничения общности можно считать, что $\xi = 1$. Случай $\tau = 1$ называется регулярным, а случай $\tau = 0$ сингулярным [12]. При $\tau = 1$ для определения компонент касательного векторного поля получается переопределенная система нелинейных уравнений в частных производных. В случае $\tau = 0$ для определения компоненты касательного векторного поля η получается нелинейное уравнение в частных производных. В работе [12] было показано что каждое решение данного уравнения порождает семейство решений исследуемого уравнения.

Рассмотрим регулярный случай $\tau \neq 0$ неклассических симметрий. Предполагая, что $\tau = 1$, и применяя классический метод Ли к уравнениям (2) и (10), приходим к переопределенной системе уравнений для ξ и τ. Решая данную систему относительно ξ и τ, находим, что данные симметрии совпадают с уже найденными классическим методом Ли.

Применяя классический метод Ли к уравнениям (2) и (10) при $\tau = 0$ ($\xi = 1$), приходим к уравнению для определения компоненты η

$$\begin{gathered}\Big[\gamma\eta_u - \gamma^2\eta_{ux} - \gamma^2\eta\eta_{uu} + 1\Big]\eta_t + \Big[2\gamma\beta\eta\eta_{ux} - 2\gamma\eta^2 + 2\gamma\beta\eta^2\eta_{uu}\Big]\eta_u^2 + \\ + \Big[(2\gamma\beta\eta\eta_{uu} + 2\gamma\beta\eta_{ux} - \gamma(3\eta - u))\eta_x + \gamma^2\eta\eta_{tu} + \gamma^2\eta_{tx} + 3\beta\eta^2\eta_{uu} - \\ -(\gamma\mu + \gamma u - 3\beta)\eta\eta_{ux} - \gamma(\mu + u)\eta_{xx} + \beta\gamma\eta^3\eta_{uuu} + 3\beta\gamma\eta^2\eta_{uux} + 3\beta\gamma\eta\eta_{uxx} + \\ + \beta\gamma\eta_{xxx} + (\gamma - 2)\eta^2\Big]\eta_u + \Big[(\gamma\mu + 3\beta + u\gamma)\eta\eta_{uu} + (\gamma\mu + 3\beta + u\gamma)\eta_{ux} + \\ + u - 3\eta\Big]\eta_x + \gamma\eta\eta_{tu} + \gamma\eta_{tx} - \gamma\beta\eta^3\eta_{uu}^2 + \Big[(\eta\gamma - \mu - u - u\gamma)\eta^2 - 3\gamma\eta_{ux}\beta\eta^2 - \\ -\gamma\beta\eta\eta_{xx}\Big]\eta_{uu} - 2\gamma\beta\eta\eta_{ux}^2 + \Big[-\gamma\beta\eta_{xx} + \eta(\eta\gamma - 2\mu - 2u - u\gamma)\Big]\eta_{ux} - \\ -(\mu + u)\eta_{xx} + 3\beta\eta\eta_{ux} + \beta\eta_{xxx} + \eta^2 + 3\beta\eta^2\eta_{uux} + \beta\eta^3\eta_{uuu} = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Задача о построении общего решения уравнения (11) является эквивалентной по сложности задаче о построении всех семейств однопараметрических решений уравнения (2). С другой стороны, любое частное решение уравнения (11) порождает семейство решений уравнения (2).

Таблица 1: Неклассические симметрии, допускаемые уравнением (2)

n	Параметры	η
1	$\forall\,\gamma, \mu, \beta$	$\eta^1 = \frac{1}{t+c_6}$
2	$\gamma \neq -1$	$\eta^2 = \frac{u}{2} + c_7$
3	$\gamma = -1, \mu = \beta$	$\eta^3 = (c_8 - 1)\left(\frac{u}{(c_8-1)(x+c_8t)-4\beta} + \frac{c_8(c_8-1)(x+c_8t)-4\beta}{[(c_8-1)(x+c_8t)-4\beta]^2}\right)$
4	$\gamma \neq -1$	$\eta^4 = \frac{1}{2\beta}u^2 + \frac{\mu-\beta}{\beta(\gamma+1)}u + c_9\exp\{x + \frac{\mu-\beta}{\gamma+1}t\} - c_{10}$
5	$\gamma = -1, \mu = \beta$	$\eta^5 = \frac{1}{2\beta}u^2 + c_{11}u + c_{12}\exp\{x + c_{11}\beta t\} - c_{13}$

В таблице 1 представлены найденные из уравнения (11) значения компоненты касательного векторного поля $\eta(x,t,u)$. Постоянные c_i, $i = 6,\ldots,13$ являются произвольными. В разделе 3 будут построены инвариантные редукции уравнения (2), соответствующие компонентам касательного векторного поля η^i, $i = 1,\ldots,5$, представленным в таблице 1.

3. Точные решения и инвариантные редукции нелинейного дифференциального уравнения для описания волн в жидкости с пузырьками газа

Получим инвариантные редукции уравнения (2) и построим их точные решения.

Рассмотрим инвариантные редукции, получаемые с помощью классических симметрий. Линейной комбинации операторов X_1 и X_2 соответствует переход к переменным бегущей волны. Данная редукция и ее точные решения были рассмотрены в работе [3]. Линейной комбинации операторов X_1, X_2 и X_3 соответствует группа преобразований Галилея. Решения, инвариантные относительно этой группы преобразования, также рассматривались в [3].

Остановимся на инвариантных редукциях, связанных с неклассическими симметриями, представленными в таблице 1. Рассмотрим редукцию, связанную с компонентой касательного векторного поля η^1. Инвариантные переменные в этом случае имеют вид

$$u = \frac{x}{t + c_6} + h(t). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (2), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для $h(t)$:

$$h_t + \frac{h}{t + c_6} - \frac{\gamma + 1}{(t + c_6)^2} = 0. \tag{13}$$

Решая уравнение (13) и используя (12), приходим к следующему решению уравнения (2):

$$u = \frac{1}{t + c_6}\left[x + C_1 + (\gamma + 1)\ln(t + c_6)\right], \tag{14}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Инвариантные переменные, соответствующие компоненте касательного векторного поля η^2, имеют вид

$$u = e^{\frac{x}{2}} h(t) - 2c_7. \tag{15}$$

Подставляя (15) в уравнение (2), получим

$$h_t + \frac{\beta - 2\mu - 4c_7}{4(\gamma + 2)}\, h = 0. \tag{16}$$

Используя (15), (16), приходим к решению уравнения (2)

$$u = C_2 \exp\left\{\frac{x}{2} - \frac{\beta - 2\mu - 4c_7}{4(\gamma + 2)}\, t\right\} - 2c_7, \tag{17}$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Рассмотрим инвариантную редукцию уравнения (2), связанную с компонентой η^3. В этом случае инвариантные переменные имеют вид

$$u = [(c_8 - 1)x + c_8(c_8 - 1)t - 4\beta]h(t) + \frac{c_8(c_8 - 1)x + c_8^2(c_8 - 1)t - 2\beta(c_8 + 1)}{(c_8 - 1)x + c_8(c_8 - 1)t - 4\beta}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в уравнение (2), получим

$$h_t + (c_8 - 1)h^2 = 0. \tag{19}$$

Используя (18), (19), приходим к решению уравнения (2)

$$u = \frac{(c_8-1)x + c_8(c_8-1)t - 4\beta}{(c_8-1)t + C_3} - \frac{c_8(c_8-1)x + c_8^2(c_8-1)\,t - 2\beta(c_8+1)}{(c_8-1)x + c_8(c_8-1)t - 4\beta}, \tag{20}$$

где C_3 — произвольная постоянная.

Аналогично предыдущим случаям, используя компоненту касательного векторного поля η^4, приходим к решению уравнения (2), выраженному через функции Бесселя

$$\begin{gathered} u = -2\beta\frac{\psi_x}{\psi} + \frac{\beta-\mu}{1+\gamma}, \\ \psi = C_4 J_\lambda\left(\sqrt{\frac{2c_9}{\beta}}e^{\frac{x+(\mu-\beta)t}{2(1+\gamma)}}\right) + Y_\lambda\left(\sqrt{\frac{2c_9}{\beta}}e^{\frac{x+(\mu-\beta)t}{2(1+\gamma)}}\right), \\ \lambda = \frac{\sqrt{2(1+\gamma)^2\beta c_{10} + (\mu-\beta)^2}}{\beta(1+\gamma)}, \end{gathered} \tag{21}$$

где C_4 — произвольная постоянная, J_λ и Y_λ — функции Бесселя и Вебера соответственно.

Отметим, что (21) вырождается в тривиальное решение при $c_9 = 0$. Поэтому данный случай необходимо рассмотреть отдельно. Действительно, используя η^4 при $c_9 = 0$, приходим к следующему решению уравнения (2):

$$\begin{gathered} u = \frac{\beta-\mu}{\gamma+1} - B\tanh\left\{\frac{B}{2\beta}\left(x + \frac{(\mu-\beta)}{1+\gamma}t + C_5\right)\right\}, \\ B = \frac{\sqrt{2(1+\gamma)^2\beta c_{10} + (\mu-\beta)^2}}{1+\gamma}, \end{gathered} \tag{22}$$

где C_5 — произвольная постоянная. Формула (22) задает двухпараметрическое семейство решений в виде волн перехода.

Остановимся на компоненте касательного векторного поля η^5. Здесь также необходимо рассмотреть два случая значений параметра c_{12}: $c_{12} \neq 0$ и $c_{12} = 0$. При $c_{12} \neq 0$ имеем семейство решений уравнения (2) для $\mu = \beta$, $\gamma = -1$, выраженное через функции Бесселя

$$\begin{gathered} u = -2\beta\frac{\psi_x}{\psi} - \beta c_{11}, \\ \psi = C_6 J_\lambda\left(\sqrt{\frac{2c_{12}}{\beta}}e^{\frac{x+c_{11}\beta t}{2}}\right) + Y_\lambda\left(\sqrt{\frac{2c_{12}}{\beta}}e^{\frac{x+c_{11}\beta t}{2}}\right), \\ \lambda = \sqrt{c_{11}^2 + \frac{2c_{13}}{\beta}}, \end{gathered} \tag{23}$$

где C_6 — произвольная постоянная.

В случае $c_{12} = 0$ имеем решение уравнения (2) $\mu = \beta$, $\gamma = -1$ в виде волн перехода

$$u = -c_{11}\beta - B\tanh\left\{\frac{B}{2\beta}(x + c_{11}\beta t + C_7)\right\}, \quad B = \sqrt{\beta(c_{11}^2\beta + 2c_{13})}, \tag{24}$$

где C_7 — произвольная постоянная.

Таким образом, в разделе найдены инвариантные редукции уравнения (2), связанные с компонентами касательного векторного поля неклассических групп преобразований, представленными в таблице 1, и построены их точные решения.

4. Заключение

В работе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение для описания волн в жидкости с пузырьками газа. Показано, что данное уравнение в общем случае инвариантно относительно двух классических однопараметрических групп Ли. В случае $\mu = \beta$, $\gamma = -1$ уравнение (2) также инвариантно относительно группы преобразований Галилея.

С помощью метода Блюмана–Коула найдены неклассические симметрии, допускаемые уравнением (2). Используя данные симметрии, построены инвариантные редукции (2). Найдены новые семейства точных решений уравнения (2).

Список литературы

1. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media, Part 2. New York: Taylor & Francis, 1990. P. 388.

2. *Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G., Shreiber I.R.* Wave Propagation in Gas-Liquid Media. Boca Raton: CRC Press, 1993. P. 240.

3. *Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I.* An extended equation for the description of nonlinear waves in a liquid with gas bubbles // Wave Motion. 2013. Vol. 50, № 3. P. 351–362.

4. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys. 1983. Vol. 24. P. 522–526.

5. *Kudryashov N.A.* On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions // Phys. Lett. A. 1991. Vol. 155, № 4-5. P. 269–275.

6. *Kudryashov N.A.* Singular manifold equations and exact solutions for some nonlinear partial differential equations // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 182, № 4–6. P. 356–362.

7. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. Waltham: Academic Press, 1982. P. 432.

8. *Olver P.J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1993. P. 513.

9. *Ibragimov N.H.* Transformation Groups Applied to Mathematical Physics (Mathematics and its Applications). New York: Springer, 2001. P. 396.

10. *Bluman G.W., Cole J.D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. 1969. Vol. 18, № 11. P. 1025–1042.

11. *Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O.* A Precise Definition of Reduction of Partial Differential Equations // J. Math. Anal. Appl. 1999. Vol. 238, № 1. P. 101–123.

12. *Kunzinger M., Popovych R.O.* Singular reduction operators in two dimensions // J. Phys. A Math. Theor. 2008. Vol. 41, № 50. P. 505201.

Classical and Nonclassical Symmetries of Nonlinear Differential Equation for Describing Waves in a Liquid with Gas Bubbles

Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I.

National Research Nuclear University MEPhI,
Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia

Keywords: nonlinear waves in a liquid with gas bubbles, classical symmetries, nonclassical symmetries, exact solutions

A nonlinear differential equation is considered for describing nonlinear waves in a liquid with gas bubbles. Classical and nonclassical symmetries of this equation are investigated. It is shown that the considered equation admits transformations in space and time. At a certain condition on parameters, this equation also admits a group of Galilean transformations. The method by Bluman and Cole is used for finding nonclassical symmetries admitted by the studied equation. Both regular and singular cases of nonclassical symmetries are considered. Five families of nonclassical symmetries admitted by this equation are constructed. Symmetry reductions corresponding to these families of generators are obtained. Exact solutions of these symmetry reductions are constructed. These solutions are expressed via rational, exponential, trigonometric and special functions.

Сведения об авторах:
Кудряшов Николай Алексеевич,
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой
Синельщиков Дмитрий Игоревич,
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
кандидат физ.-мат. наук, ст. преподаватель